Mathe C4 Merz - Cheatsheet

greeny, nudelsalat, Sheppy
September 2015

Diesen Zusammenfassung kann Fehler enthalten!

Contents

1 Statistik

1.1 empirisches arithmetisches Mittel

$$x_{arith} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

1.2 empirischer Median (Zentralwert)

$$x_{median} = \begin{cases} \frac{x_{n+1}}{2} & \text{n ungerade} \\ \frac{x_{n/2} \ + x_{(n+1)/2}}{2} & \text{n gerade} \end{cases}$$

Wobei der Index für die n'te Zahl in einer Angabe in Stile von {A,B,C,...} steht.

1.3 empirische korrigierte Varianz

$$x_{var} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{arith})$$

1.4 Regressionsgerade

Gauss'sche Normalengleichung Die Regressionsgerade wird mit der Gauss'schen Normalengleichung gelöst.

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i * y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}, \text{ mit } i \in n \tag{1}$$

$\rightarrow$ Auflösen nach Parametern a, b.
Regressionsgerade:

$$y(x) = a * x + b \tag{2}$$

1.5 Maximum-Likelyhood Methode

Problembeschreibung: Man möchte für einen unbekannten Parameter λ einer Verteilung, die mindestens einen Parameter besitzt, einen Schätzwert bestimmen mithilfe einer konkreten Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Likelihood-Funktion $L(\lambda)$ bilden für gegebene Verteilung

$$L(\lambda) = L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) == \prod_{i=1}^{n} \underbrace{f}_{\text{Dichtefunktion}} (x_i, \lambda) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Im Falle von Exponentialverteilung:

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n * e^{-\lambda * \sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{5}$$

2. Funktion $L(\lambda)$ mit ln multiplizieren
   Rechenregeln für ln:
   - $\ln a^b = b * \ln a$
   - $\ln(a * b) = \ln a + \ln b$
3. Ableiten nach λ: $\frac{\partial \ln * L(\lambda)}{\partial \lambda}$
4. Funktion gleich 0 setzen und nach λ auflösen.

1.6 Konfidenzintervalle

Standartwerte für Konfidenz:

$$90\% : z = 1.65$$
$$95\% : z = 1.96$$
$$99\% : z = 2.58$$

$$P(|\bar{x} - \mu| \geq c) = \alpha \tag{6}$$

$$\mu \in [\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] \tag{7}$$

1.7 Kovarianz

Sind zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 stochastisch unabhängig dann gilt:

$$cov(X_1, X_2) = 0 \tag{8}$$

Ansonsten:

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) \tag{9}$$

Erwartungswert:

$$EX = \sum_{k \in \Omega} k * P(X = k) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx \tag{10}$$

Beispiel: Berechnen der Kovarianz der Zufallsvariablen $Z_1 = X_1 - X_2$ und $Z_2 = X_1$, wenn der Zufallsvektor (X_1, X_2) auf der Menge

$$M = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_2 \leq 2 \text{ und } 0 \leq x_1 \leq x_2\} \tag{11}$$

Gesucht: $cov(Z_1, Z_2)$

1. Kovavarianz umformen

   $$cov(Z_1, Z_2) = cov(X_1 - X_2, X_1) = (E(X_1^2) - E(X_1)^2) - (E(X_2X_1) - E(X_2)E(X_1)) \tag{12}$$

2. Die **Fläche** A_M unter Funktion berechnen: $A_M = 2$.

3. Die **Dichtefunktion** ist der Kehrwert von A_M und damit $\frac{1}{2}$.

   $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x_1, x_2 \in M \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{13}$$

4. Jetzt wieder mittels **Marginalsdichte** $f(x_1)$ und $f(x_2)$ bestimmen.

   $$f_1(x_1) = \int_{x_1}^{2} f(x_1, x_2)dx_2 \tag{14}$$

   $$f_2(x_2) = \int_{0}^{x_2} f(x_1, x_2)dx_1 \tag{15}$$

5. Berechnung der benötigten Erwartungswerte E:

   $$E(X_i) = \int_0^2 x_i * f_i(x_i)dx \tag{16}$$

   $$E(X_i^2) = \int_0^2 x_i^2 * f_i(x_i)dx \tag{17}$$

   $$E(X_1X_2) = \underbrace{\int_0^2 \int_0^{x_2}}_{\text{Integration über } x_1 \text{ und } x_2} x_1 * x_2 * f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \tag{18}$$

6. Einsetzen in umgeformte Kovarianzformel (siehe 1)

1.8 Markov-Ketten

- Bei Übergangsmatrix $P \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{rxr}$ sind alle Zeilensummen gleich 1.
- Vektor $\vec{u} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^r$ mit $||\vec{u}||_1 = 1$ der

  $$\vec{u} = P^T \cdot \vec{u} \tag{19}$$

  erfüllt, heißt **Gleichgewichtszustand/-verteilung**.

- **Berechnung** von $\vec{u}$: Kern($P^T - \mathrm{Id}_r$).
  $\rightarrow$ Kern wird berechnet durch klassischen Gauß- Algorithmus. Wenn keine eindeutige Lsg (z.B. $0 = 0$), dann Variable beliebig wählen. Es gibt immer einen Kern, da Determinante 0 garantiert ist durch obige Summenbedingung.
- Vektoreinträge müssen positiv sein, sonst Fehler.
- Vektor $\vec{u}$ durch $||\vec{u}||_1$ (Summennorm) teilen.

$$||\vec{u}||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{20}$$

2 Mengen

2.1 o-Algebra

- leere Menge enthalten
- alle Kombinationen der Elemente enthalten, die nicht bereits gemeinsamme Elemente haben also z.B. **NICHT** {x,y} und {y,z} zu {x,y,z} machen
- alle Komplemente enthalten

Beispiel:
Grundmenge $= \{1,2,3,4\}$
NICHT o-Algebra Menge $= \{\{1,2\},\{3\}\}$
o-Algebra Menge $= \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \underbrace{\{1,2,3\}}_{\{1,2\}\{3\}}, \underbrace{\{3,4\}}_{\neg\{1,2\}}, \underbrace{\{4\}}_{\neg\{1,2,3\}}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,4\}\}$

3 Wahrscheinlichkeiten

3.1 Würfeln

3.1.1 keine 6

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^n, n = \text{Anzahl der Würfe}$$

3.1.2 mindestens 'x' 6er (Gegenereignis)

$$p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - p_0$$

$$p_2 = 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - p_1 - p_0$$

$$p_x = 1 - \sum_{i=0}^{x-1} p_i$$

3.1.3 6er-Pasch bei 2 Würfeln

$Ereignisraum = 6^2$, Anzahl günstiger Ereignisse = 1 , nähmlich (6,6)
dann wieder über Gegenereignis:

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

3.1.4 genau eine 6 bei n-Würfeln/Würfen

$$p = \frac{n * 5^{(n-1)}}{6^n}$$

- 6^n ist wie immer die Anzahl der Gesamtmöglichkeiten
- es gibt n-Moglichkeiten an der die 6 sein kann
- es bleiben bei den verbleibenden n-1 Würfen 5 Möglichkeiten

3.1.5 genau x-6er bei n-Würfeln/Würfen

$$p = \frac{\binom{n}{k} 5^{(n-k)}}{6^n}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

oder noch allgemeiner, mit Anzahl Möglichkeiten 'z' (z.B. 6 bei Würfel):

$$p = \frac{\binom{n}{k} (z-1)^{(n-k)}}{z^n}$$

3.1.6 X-Mal Werfen, min eine 3 unter der Bedingung min. eine 6

A = min. eine 3
B = min. eine 6

gesucht:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = 1 - P(keine\ 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

Idee:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= 1 - P(\neg(A \cap B)) \\
&= 1 - P(\neg A \cup \neg B) \\
&= 1 - P(\neg A) - P(\neg B) + P(\neg A \cap \neg B) \\
&= 1 - P(keine\ 3) - P(keine\ 6) + P(weder\ 3\ noch\ 6) \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = 1 - \frac{994}{1296}
\end{aligned}$$

...und das dann nur noch oben einsetzen und fertig.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

also:

$$P(A|B) = \frac{\frac{994}{1296}}{\frac{625}{1296}}$$

3.1.7 Seiten mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten

z.B. 6 Seiten mit normaler Wahrscheinlichkeit (w_1), 8 Seiten mit 1/4 Wahrscheinlichkeit (w_2), wir exploiten die Tatsache, dass:

$$\sum (Teil-) Wahrscheinlichkeiten = 1$$

also:

$$6w_1 + 8w_2 = 1 \tag{21}$$

$$\frac{1}{4}w_1 = w_2 \tag{22}$$

Zwei Gleichungen, zwei Unbekannte, easy mode.

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

4.1 Beispiele

4.1.1 Krankheitstest

0,2% Krank, 95% der Kranken werden erkannt, 98% der Gesunden werden richtig erkannt

Ereignis A_1: Person ist krank
Ereignis A_2: Person ist gesund

Ereignis B: Test identifiziert Person als krank.

Wie viele als Krank erkannte wirklich krank?

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) * P(A_1)}{P(B|A_1) * P(A_1) + P(B|A_2) * P(A_2)} = \frac{0,95 * 0,002}{0,95 * 0,002 + 0,002 * 0,998} = 8,7\%$$

Lösung mittels **Formel von Bayes**:

$$P(B_k/A) = \frac{P(A|B_k) * P(B_k)}{\sum_{j \in J} P(A|B_j) * P(B_j)} \tag{23}$$

Dieser Vorgang wird auch **Rückwärtsinduktion** genannt. Angenommen man kennt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignis unter einer gewissen Bedingung (hier Test schlägt zu $x\%$ an unter Bedingung Person ist krank $P(B|A_1)$ oder Person ist gesund $P(B|A_2)$), dann kann man die umgekehrte bedingte Wahrscheinlichkeit mit dieser Formel berechnen. Hier: Wie wahrscheinlich ist es, dass Person krank ist, unter Bedingung, dass Test das gemeldet hat $P(A_1|B)$.

4.1.2 min. eine 6 unter Bedingung verschiedene Augenzahlen

$$P(min.eine6|verschiedeneAugenzahlen) = \frac{\text{Möglichkeiten verschiedene Augenzahlen UND min. eine 6}}{\text{Möglichkeiten verschiedene Augenzahlen}}$$

$$p = \frac{n * (6-1)! - (6-n)!}{6! - n!}$$

bei 3 Würfeln also z.B.:

$$p = \frac{3 * 5! - 3!}{6! - 3!} = \frac{3 * 5 * 4}{6 * 5 * 4} = 0,5$$

5 Wahrscheinlichkeitsfunktionen

5.1 Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsfunktionen

$$\sum_{w \in \Omega} f(w) = 1 \text{ (die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1)}$$

und logischerweise:

$$\forall w \in \Omega . f(w) >= 0 \text{ (keine negativen Wahrscheinlichkeiten)}$$

5.2 Absoluten Momente diskreter Verteilungen

Ist für $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Summe $\sum_{x \in X} |x|^k f(x) < \infty$, so heisst

$$m_k = m_k(P) = \sum_{x \in X} x^k f(x) \tag{24}$$

das **k-te absolute Moment** der Verteilung P.

5.2.1 Mittelwert, Varianz

- Mittelwert: $m_1 = m_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} n * f(n)$
- Varianz: $\widehat{m}_2 = m_2 - m_1^2$

5.2.2 Momenterzeugende Funktion

$$M(t) = \sum_{n\in\Omega}^{\infty} (e^t)^n * f(n)$$

- f(n) ist die gegebene Wahrscheinlichkeitsfunktion
- 'n' könnte z.B. definiert sein als $n = \{1, 2, 3, ...\}$

Berechnungsvorschrift für das k-te Moment:

1. Berechne k-te Ableitung M^k von $M(t)$
2. $m_i = M^{(k)}(0)$

5.3 Erzeugende Funktion

5.3.1 Wahrscheinlichkeitsfunktion berechnen

Gegegeben: Eine erzeugende Funktion $\hat{f}(z)$ gegeben.

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k \tag{25}$$

Gesucht: Die Funktion $f(k)$
Möglichkeit 1: Taylorentwicklung

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{f}^{(k)}(0) z^k \tag{26}$$

$$\Rightarrow f(k) = \frac{1}{k!} \hat{f}^k(0) \tag{27}$$

Möglichkeit 2: Problem auf bekannte diskrete Verteilung zurückführen (z.B. geometrische Reihe)

5.3.2 Mittelwert m_1

$$M(t) = \hat{f}(e^t) \tag{28}$$

$$m_1 = M'(t)|_{t=0} = \hat{f}'(e^t)e^t|_{t=0} = \hat{f}'(1) \tag{29}$$

5.3.3 Varianz $\hat{m}_2$

1. Zuerst **zweites Moment** berechnen:

$$m_2 = \hat{f}''(1) + \hat{f}'(1) \rightarrow \text{, falls } \textbf{Erzeugende-Funktion} \text{ (hier)} \qquad (30)$$

$$m_2 = \hat{f}''(0) \rightarrow \text{, falls } \textbf{Momenterzeugende-Funktion} \qquad (31)$$

2. Dann **Varianz**:

$$\hat{m}_2 = m_2 - m_1^2 \qquad (32)$$

   Siehe unten für m_2 Berechnungsvorschrift!

6 Verteilungen und Verteilungsfunktionen

6.1 Allgemein

6.1.1 Eigenschaften Verteilungsfunktionen

- stetig
- monoton steigend
- $\lim_{t\rightarrow\infty} G(t) = 1, \quad \lim_{t\rightarrow-\infty} G(t) = 0$
- Dichte $g(t) = G'(t)$
- $m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} t * g(t)dt$

6.2 Binominalverteilung

6.2.1 Allgemein

$$\mathcal{B}(k|p,n) \quad \textbf{oder auch} \quad B(k;p,n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ \text{ mit k = 0,1,2,...,n}$$

- wobei diese Funktion die **kumulierte** Wahrscheinlichkeit angibt, also z.B. wobei k = 2 die Wahrscheinlichkeit "1 oder 2"
- p ist die Wahrscheinlichkeit für ein positives Ereignisse
- n ist Anzahl wie oft wir ziehen

6.2.2 Beispiel: 500 Druckfehler auf 500 Seiten

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einer Seite mindestens 3 Druckfehler sind?

$$1 - \sum_{k=0}^{2} \mathcal{B}(k,p,n) \ \ mit$$

k=0,1,2 (Gegenereignisse)

n = 500 (wir ziehen Fehler "ohne zurücklegen")
p=1/500 (die Wahrscheinlichkeit dass ein Fehler auf einer bestimmten Seite ist)

$$
\begin{aligned}
1 - \sum_{k=0}^{2} \mathcal{B}(k|1/500, 500) &= 1 - \mathcal{B}(0|1/500, 500) - \mathcal{B}(1|1/500, 500) - \mathcal{B}(2|1/500, 500) \\
&= 1 - \left(\frac{499}{500}\right)^{500} - 500\frac{1}{500}\left(\frac{499}{500}\right)^{499} - \frac{500 * 499}{1 * 2}\left(\frac{1}{500}\right)^{2}\left(\frac{499}{500}\right)^{498} \\
&= 0,08
\end{aligned}
$$

6.3 Poisson-Verteilung

6.3.1 Allgemein

Ereignisse müssen mit konstanter Rate, unabhängig voneinander und in einem festen Bereich (Modell) stattfinden!

$$P_{\lambda}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

6.4 Normal-Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$f(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad m_1 = \mu \qquad \widehat{m}_2 = \sigma^2$

6.4.1 $\mathcal{N}(0, 1)$-Verteilung

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-0.5x^2}$

6.5 Exponentialverteilung

Dichtefunktion:

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{33}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_0^x f_{\lambda}(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{34}$$

6.6 Laplace-Verteilung

Zufallsexperimente, bei denen jedes Ergebnis die gleiche Chance hat.
$f(w) = L(\Omega) = \frac{1}{|\Omega|}$

6.7 Hypergeometrische Verteilung

Zufallsexperimente, bei denen man die Ergebnisse als Anzahlen von schwarzen Kugeln unter n gezogenen interpretieren kann.
$f(k) = H(N, K, n) = \frac{\binom{K}{k} * \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

6.8 Geometrische Verteilung

Die geometrische Verteilung beschreibt die Wartezeit für das erstmalige Eintreten eines Ereignisses unter der Annahme der Gedächtnislosigkeit.
$G(p) = f(n) = p * q^{n-1}$ $\qquad m_1 = \frac{1}{p}$

6.9 Uniform-Verteilung $\mathcal{U}(a, b)$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{35}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \tag{36}$$

7 Zufallsvariablen

7.1 Dichten von Verteilungen von Zufallsvariablen

Problembeschreibung: Berechnung von Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(X_1 > a * X_2)$ o.ä. Zufallsvariablen X_1, X_2 sind dabei stochastisch unabhängig. Die Verteilungen von X_i haben dabei die Dichten f_i.
Somit gilt nach der Marginalsdichte: $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) * f_2(x_2)$.

$$P(X_1 > a * X_2) = \int \int_{x_1 > a * x_2} f_1(x_1) * f_2(x_2) dx_1 dx_2 := I \tag{37}$$

In Abhängigkeit von Reihenfolge, in der die Integration über die Variablen x_1 und x_2 durchgeführt werden, ergeben sich zwei Darstellungen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) F_2(\frac{1}{a} x_1) dx_1 \tag{38}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)(1 - F_1(a x_2)) dx_2 \tag{39}$$

Siehe auch Lösungssammlung Aufgabe 98 ff.

7.1.1 Beispiel

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien uniform verteilt auf $[0, 2]$. Berechnen Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(X_1 X_2 \leq \frac{1}{2})$.

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x_1, x_2 \leq 2\} \tag{40}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1) * f(x_2) = \frac{1}{4} & \text{für } (x_1, x_2) \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{41}$$

Borelsche Menge:

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 * x_2 \leq \frac{1}{2} \ = x_2 \leq \frac{1}{2x_1}\} \tag{42}$$

$$P(x_1 x_2 \leq \frac{1}{2}) = \int_B f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int 1_B * 1_M * \frac{1}{4} d(x_1, x_2) \tag{43}$$

$$\int 1_{B \cap M} * \frac{1}{4} d(x_1, x_2) \tag{44}$$

Schnittmenge aus B und M:

$$B \cap M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ |(0 \leq x_1 \leq \frac{1}{4} \wedge 0 \leq x_2 \leq 2) \vee (\frac{1}{4} \leq x_1 \leq 2 \wedge 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2x_1})\} \tag{45}$$

$$\longrightarrow P(x_1 x_2 \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^2 \frac{1}{4} dx_1 dx_2 + \int_{\frac{1}{4}}^2 \int_0^{\frac{1}{2x_1}} \frac{1}{4} dx_2 dx_1 \tag{46}$$

7.2 Erwartungswert ε diskreter Zufallsvariablen

Falls der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen X auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ existiert, ist

$$\varepsilon_P X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\{\omega\} \tag{47}$$

8 Marginaldichte - Beispielrechnung

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} ce^{-(2x_1+3x_2)} & x_1 > 0 \, und \, 0 < x_2 < x_1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Marginaldichte:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \overbrace{\int_0^{x_1}}^{\text{Grenzen von } x_2} f(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \int_0^{x_1} ce^{-2x_1} e^{-3x_2} \, dx_2 \\ &= \underbrace{c * e^{-2x_1}}_{\text{Konstante, da Integration nach } x_2} \overbrace{\int_0^{x_1} e^{-3x_2} \, dx_2}^{mit \, 0 \, und \, x_1 \, einsetzen \, integrieren} \\ &= ce^{-2x_1} \frac{1}{3}(1 - e^{-3x_2}) \end{aligned}$$

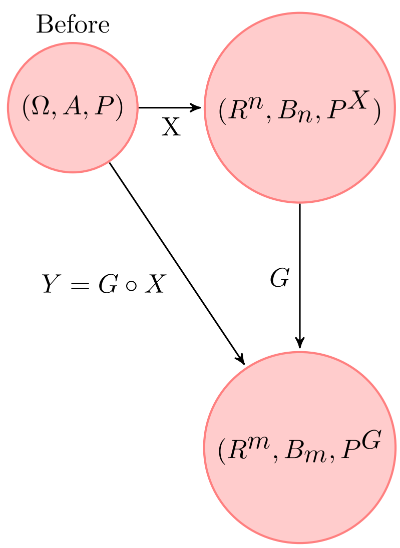
Gegebenenfalls konnen wir das gleiche auch mit dx_2 tun wenn das einfach zur integrieren ist oder nach beiden Marginaldichten gefragt ist. Damit $f(x_1, x_2)$ und $f_2(x_2)$ Dichten sind muss gelten:

$$\int f_2(x_2) dx_2 = 1$$

bzw:

$$\int \int f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

9 Transformation von Dichten



Gegeben: Man hat stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gegeben mit Art der Verteilung.
Gesucht: Verteilung von Zufallsvariable Y, die sich aus X_i berechnen lässt.
Beispiel:
Welche Verteilung besitzt

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \tag{48}$$

falls X_1 und X_2 exponentiell verteilt mit Paramter λ und stochastisch unabhängig sind.

1. Wegen Unabhängigkeit der Variablen X_1 und X_2 besitzt P^X die Dichte $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$.
2. $M = (x_1, x_2); x_1 > 0$ und $x_2 > 0$
   $\longrightarrow$ Wertebereich von x_n anhand von Verteilung ermitteln.
3. Gleichungen $G(x)$ definieren:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \tag{49}$$

$$y_2 = x_2 \tag{50}$$

4. Funktionaldeterminante ($J_G(x)$) der Abbildung G berechnen

$$J_G(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$J_G(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{x_2}{(x_1+x_2)^2} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{x_2}{(x_1+x_2)^2} \tag{52}$$

5. Umkehrabbildung G^* berechnen. Alle Zufallsvariablen werden werden mittels Funktionen verändert: z.B: $y_1 = x_1/x_2$. Jede i-te Funktion nach x_i auflösen.

$$x1 = \frac{y_1 y_2}{1 - y_1} \tag{53}$$

$$x_2 = y_2 \tag{54}$$

6. Gesuchte Funktion: $g(y) = f(G^*(y))\frac{1}{|J_G(G^*(y))|}$
$\longrightarrow$ Setze für alle x_i dementsprechend y_i ein und multipliziere mit Kehrwehrt von Funktionaldeterminante.

$$g(y_1, y_2) = \lambda^2 e^{-\frac{\lambda}{1-y_1}} \frac{y_2}{(1-y_1)^2} \tag{55}$$

7. Mit Marginaldichte $g_1(y_1)$ berechnen:

$$g_1(y_1) = \frac{\lambda}{1-y_1} \int_0^\infty y_2 \frac{\lambda}{1-y_1} e^{-\frac{\lambda}{1-y_1}} dy_2 \tag{56}$$

$$= \frac{\lambda}{1-y_1} m_1(\varepsilon(\frac{\lambda}{1-y_1})) \tag{57}$$

$$= 1 \tag{58}$$

$\longrightarrow$ Da Mittelwert der ε-Verteilung gerade Kehrwert des Paramters ist.

8. Folgerung: Dichte g_1 ist also die der Uniform-Verteilung ($U(0,1)$).